

Государственное автономное профессиональное образовательное учреждение  
Чувашской Республики «Алатырский технологический колледж»  
Министерства образования и молодежной политики Чувашской Республики

## **ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ПРОЕКТ**

ТЕСТИРОВАНИЕ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Автор: Тюрюшова Евгения Романовна,  
студентка 2 курс, специальности  
21.02.05 Земельно-имущественные отношения  
Руководитель: Фирсова Н.А, преподаватель математики  
Алатырского технологического колледжа

Алатырь, 2018

## План

Введение.....	3
1. Тестирование - как способ контроля знаний.....	4
2. Тестирование с точки зрения теории вероятностей .....	6
2.1 Определение вероятностей угадывания по формулам.....	6
2.2 Определение вероятностей угадывания путем эксперимента.....	11
Заключение.....	13
Литература.....	14

## Введение

Слово "тест" вызывает самые различные представления. Одни полагают, что это вопросы или задачи с одним готовым ответом, который надо угадать. Другие считают тест формой игры или забавы. Третьи пытаются истолковать это как перевод с английского слова "test", (проба, испытание, проверка) [1, с.4-5]. В данной работе рассматриваю проблему угадывания в тестах с выбором ответа.

Как велика вероятность угадать правильный ответ? На этот вопрос попытаюсь ответить с помощью знаний из теории вероятностей и результатов проведенного эксперимента. Как известно теория вероятностей возникла в середине XVII века из теории азартных игр [2,с.13-14]. Тестирование - это тоже своего рода «игра» с двумя возможными исходами - «угадал», «не угадал».

В ходе исследования, выдвигаю гипотезу: результаты угадывания ответов на тестовые вопросы подчинены некоторой закономерности и существует возможность определить вероятность получения положительной оценки при простом угадывании ответов можно по формуле Бернулли.

Актуальность темы состоит в том, что в настоящее время тестовые задания являются одной из основных форм массового контроля знаний. Но при ограничении времени тестирования у незнающих студентов есть возможность угадать правильный ответ. Возникает вопрос, насколько вероятно получить положительную оценку отвечая на вопросы наугад?

Цель проекта: выявить закономерность угадывания числа правильных ответов при тестировании.

Задачи проектного исследования:

- изучить учебную и научно - популярную литературу по теме;
- провести «экспериментальное» тестирование среди студентов техникума;
- вычислить вероятность угадывания по формуле Бернулли;
- проанализировать полученные данные, сравнив их с результатами опроса;
- сделать выводы.

Объект исследования: вероятность угадывания правильных ответов при тестировании.

Предмет исследования: тестовые задания с несколькими альтернативами

Практическая значимость: работа может быть полезна выпускникам школ, студентам, составителям тестов, всем желающим подробнее ознакомиться с возможностями применения теории вероятностей на практике.

Методы исследования: методы сравнения, анкетирование, математические методы обработки и представления полученных данных.

### **1.Тестирование - как способ контроля знаний**

Тест — система заданий специфической формы, возрастающей трудности, позволяющая качественно оценить структуру знаний и эффективно измерить уровень подготовленности студентов [7].

К преимуществам тестирования относится: объективность, простота, демократичность, массовость и кратковременность, технологичность.

Недостатки тестирования: относительная трудность создания хорошего теста, возможность угадывания ответов при использовании закрытой формы тестовых заданий, необходимость создания и приобретения дорогостоящих технических средств для использования тестов при машинном контроле [7].

В наиболее популярной классификации тесты можно разделить на две группы:

- тестовые задания закрытого типа (каждый вопрос сопровождается готовыми вариантами ответов, из которых необходимо выбрать один или несколько правильных, продолжить последовательность, установить соответствие);
- тестовые задания открытого типа (на каждый вопрос испытуемый должен предложить свой ответ: дописать слово, словосочетание, предложение, знак, формулу и т.д.)[4].

Задания с выбором одного или нескольких ответов являются самой критикуемой формой тестирования. При тестировании остается возможность угадывания правильного ответа. Именно эта возможность является главным аргументом критиков тестовых заданий закрытого типа. Тестирование часто критикуют за то, что для большинства заданий закрытого типа существует вероятность случайного угадывания правильного ответа. Чем меньше возможных альтернатив предлагается тестируемому в рамках одного задания, тем больше вероятность угадывания [6].

Элемент случайности и интуиции неизбежен, разработчик теста стараются свести элемент случайности к минимуму. Для этого существуют различные приемы: увеличение числа альтернатив, использование заданий с множественными ответами, открытые тесты.

Если предположить, что студент не знает правильный ответ ни на один вопрос и пытается отвечать наугад, то применяется формула коррекции угадывания:

$X_{\text{corr}} = m - n / (s-1)$ , где  $X_{\text{corr}}$  — показатель, скорректированный на угадывание;  $m$  — количество правильных ответов;  $n$  — количество неправильных ответов;  $s$  — количество вариантов выбора в задании.

Например, для примера, теста, состоящего из 30 заданий с четырьмя ответами, то в случае 20 правильных и 10 неправильных ответов получим  $X_{\text{corr}} = 20 - 10/3 \approx 17$  баллов [1, с.54]. Получение положительной оценки при тестировании зависит так же от норм оценивания.

Одна из таких норм - социальная (статистическая) соотносительная. Это сравнение с результатами других учащихся, некий договор между обществом, педагогом и обучаемым о допустимом количестве двоечников.

Границу угадывания для тестов с единичным выбором вычисляется по формуле:  $\Gamma = 1,5 * N / m$ , где  $N$  - количество заданий в тесте,  $m$  - количество вариантов ответа  $p = 1/n$  - вероятность угадывания правильного ответа одного задания. Что бы свести к минимуму возможность угадать правильно, нужно, чтобы граница угадывания была левее оценки "3" [6]. Например,  $N=20$  - количество заданий в тесте,  $m=5$  - количество вариантов ответа,  $p=1/5$  - вероятность угадывания правильного ответа одного задания,  $N_{\text{ср}}=N/m=4$  - среднее число угаданных ответов. Граница угадывания:  $\Gamma = 1.5 * N / m = 6$ .

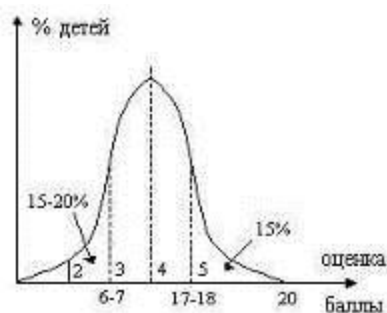


Рис. 1

Неоднозначное отношение педагогов к использованию тестового контроля известно. А как относятся к тестам студенты? Студентам 1-2 курсов Алатырского технологического колледжа было предложено ответить на вопросы:

1. Обычно я осмысленно отвечаю на вопросы теста, не рассчитывая на удачу.
2. Если бы я мог (могла) выбирать между ответом на вопросы теста и выполнением письменной работы с развернутым ответом, то я бы предпочел тест.
3. Я считаю, что оценка за тест объективно оценивает мои знания по данной теме (в случае отрицательного ответа, поясните, завышена эта оценка или занижена, на ваш взгляд).

Большинство (94,28%) предпочли бы тест письменной работе или устному развернутому ответу. Что же касается объективности оценки, то здесь мнения разделились. 68,75% участников опроса согласились с тем, что получают объективную, действительную оценку своих знаний при ответе на тест. Среди несогласных с этим мнением 12,5% считают, что тест завышает оценку, 18,75% - занижает.

## 2. Тестирование с точки зрения теории вероятностей

### 2.1 Определение вероятностей угадывания по формулам

*«Вероятность математическая – это числовая характеристика степени возможности появления какого – либо определенного события в тех или иных определенных, могущих повторяться неограниченное число раз, условиях.»*  
А.Н. Колмогоров

Теория вероятностей – раздел математики, изучающий случайные события. Приведу основные теоретические сведения из теории вероятностей, не обходимые для данного исследования.

Случайным событием называется любой факт, который в результате испытания может произойти или не произойти. Под испытанием в этом определении понимается выполнение определенного комплекса условий, в котором наблюдается то или иное явление. Значит, событие - это возможный исход, результат испытания ( опыта, эксперимента) [3,с.16].

Численная мера объективной возможности наступления события называется вероятностью события. Вероятность любого события заключена между нулем и единицей, т.е.  $0 \leq P(A) \leq 1$  [3,с.20].

Если вероятность наступления события  $A$  в каждом испытании не меняется в зависимости от исходов других, то такие испытания называют независимыми относительно события  $A$ . Если независимые повторные испытания повторяются при одном и том же комплексе условий, то вероятность наступления события  $A$  в каждом испытании одна и та же. Описанная последовательность независимых испытаний получила название схемы Бернулли.

**Теорема.** Если производится  $n$  независимых опытов, в каждом из которых событие  $A$  появляется с вероятностью  $p$ , то вероятность того, что событие  $A$  появится ровно  $m$  раз, выражается формулой:  $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$ , где  $q = 1 - p$ . [3,с.68]

Под случайной величиной понимается переменная, которая в результате испытания в зависимости от случая принимает одно из возможного множества своих значений (какое именно значение неизвестно).

Случайная величина называется дискретной(прерывной), если множество ее значений конечное, или бесконечное но счетное [3,с.89].

Законом распределения случайной величины называется соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями. Закон распределения может быть задан в виде таблицы [3,с.89].

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех ее возможных значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i. [2,с.88].$$

Математическое ожидание обозначают также через  $M(x)$  и оно называется центром рассеивания распределения вероятностей случайной величины. Например, в тесте, состоящем из 20 вопросов с пятью альтернативами, математическое ожидание угадывания равно четырем (Рис.1).

Для оценки рассеивания возможных значений случайной величины вокруг ее математического ожидания рассматривается другая числовая характеристика - дисперсия.

**Определение.** Дисперсией (рассеиванием) случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:  $D(X) = M((X - M(X))^2).$ [2,с.88].

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины. Удобнее пользоваться величиной, размерность которой совпадает с размерностью случайной величины. Такой величиной будет среднее квадратическое отклонение (или «стандарт») случайной величины, оно равно корню квадратному из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Биномиальным называется распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли. [2,с.67].

Математическое ожидание биномиального распределения с параметрами  $n$  и  $p$  равно произведению  $np$ . [2,с.84].

Например, для 20 вопросов с четырьмя альтернативами, математическое ожидание угадывания равно пяти.

Дисперсия биномиального распределения с параметрами  $n$  и  $p$  равна  $npq$ . [2,с.93].

Эксперимент с «тестированием» можно рассматривать, как случайную величину, подчиняющуюся биномиальному распределению. Определим вероятность получения положительной оценки при простом угадывании ответов по формуле Бернулли. В нашем случае исходы: «угадал ответ», «не угадал».

Пусть событие  $A$  – это правильно выбранный ответ из четырех предложенных в одном тестовом вопросе. Вероятность события  $A$  определена как отношение числа случаев, благоприятствующих этому событию (т.е. правильно угаданный ответ, а таких случаев один), к числу всех случаев (таких случаев 4). Тогда  $p=P(A)=1/4$ .

Вероятность противоположенного события  $q=P(\bar{A})=1-p=3/4$ .

Пусть тест содержит 10 вопросов. Составим закон распределения  $S.V$ .  $X$ - число верно угаданных ответов. Для упрощения подсчетов все вычисления велись в электронных таблицах Excel.

Вероятности, с которыми случайная величина принимает, то или иное значение приведены в таблице.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	0,05	0,18	0,28	0,2	0,14	0,05	0,01	0,0030	0,00038	0,00002	0,000000
i	6	8	2	5	6	8	6	9	62	861	9537

Табл.1

Для определения среднего числа угаданных ответов определим математическое ожидание и дисперсию:  $M(x) = np$   $M(x)=10*0,25=2,5$ ;

$$D(x) = npq \quad D(x) = 10*0,25*0,75=1,875; \sigma=1,369306$$

Наивероятнейшее число правильно угаданных ответов  $np-q \leq m \leq np+q$

$$10*0,25-0,75 \leq m \leq 10*0,25+0,75 \quad 1,75 \leq m \leq 3,25.$$

Вероятнее всего угадать 2 или 3 правильных ответа.

Расчет по формулам показывает, что для теста из 10 вопросов с 4 альтернативами вероятнее всего угадать два или три ответа, вероятность составляет 28% и 25% соответственно. Суммарная вероятность угадать не менее половины ответов равна 0,078 или 7,8%. Т.е только 7-8 человек могут справиться с такой задачей.

Если положительная оценка ставится не менее чем за 6 правильных ответов из 10, то вероятность заработать «хотя бы тройку» не превышает 0,02 или всего 2%.



Увеличим число вопросов в тесте. Составим закон распределения С.В .X. - число верно угаданных ответов, для что для теста из 13 вопросов с 4 альтернативами. Результаты вычислений сведены в таблицу (табл. 2) и показаны графически (Рис.2).

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P	0,03518 4372	0,13194 1395	0,23089 7442	0,25013 8895	0,18760 4171	0,10318 2294	0,04299 2623	0,01381 9057	0,00345 4764

X	9	10	11	12	13	14	15
P	0,0006717	0,0001007	0	0	0	0	0

Табл. 2

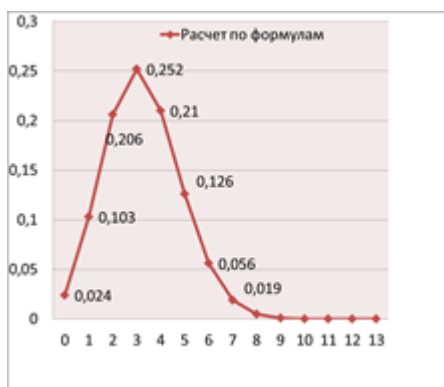


Рис. 2

Из таблицы видно, что для теста из 15 вопросов с 4 альтернативами вероятнее всего угадать два или три ответа, вероятность составляет 23% и 25% соответственно. Угадать более 8 вопросов практически невозможно т.к. вероятность составляет менее 1%. Суммарная вероятность угадать не менее половины ответов (восемь и более) равна 0,004239756 или 0,4% т.е. тоже практически не возможно.

Увеличим число альтернатив в тесте. Составим закон распределения С.В .X. - число верно угаданных ответов, для что для теста из 10 вопросов с 5 альтернативами. Тогда  $p=P(A)=1/5$   $q=4/5$ .

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	0,1073 74182	0,2684 35	0,3019 89888	0,2013 26592	0,0880 80384	0,0264 24115	0,0055 05024	0,0007 86432	7,3728 E-05	0,0000 04096	1,024 E-07

Табл. 3

$$M(x)=10*0,2=2$$

$$D(x)=10*0,2*0,8=1,6. \text{ Вероятнее всего угадать два ответа.}$$



Рис. 3

Угадать более 6 вопросов практически невозможно т.к. вероятность составляет менее 1%. Суммарная вероятность угадать не менее половины ответов равна (шесть и более) равна 0,032793498 или 3%. Значит, согласно расчетам, только трое из ста могут на это рассчитывать.

Обычно выполнению проверочных работ предшествует подготовка, т. е. на экзамене мы отвечаем, руководствуясь знаниями. Рассмотрим тест из десяти вопросов с четырьмя альтернативами. Подсчитаем вероятность правильно ответить на 5, 6 и т.д. до 10 вопросов из 10-ти при знании 1, 2 и 3 правильных ответов.

Если знаем один ответ, то чтобы ответить правильно, не менее чем на 5 вопросов нужно угадать от 4 до 9 оставшихся.

$X_i$	4	5	6	7	8	9
$P_i$	0,117	0,039	0,008652	0,001236	0,000103	0,00000286

Табл. 4

Суммарная вероятность получения положительной оценки: 0,165993861

Если знаем два правильных ответа, то для то чтобы ответить правильно не менее, чем на 5 вопросов нужно угадать от 3 до 8 оставшихся.

$X_i$	3	4	5	6	7	8
$P_i$	0,208	0,087	0,023	0,003845	0,0003662	0,00001526

Табл. 5

Суммарная вероятность угадать не менее 5 вопросов: 0,32222646.

Если знаем три правильных ответа, то чтобы ответить правильно не менее чем на 5 вопросов, нужно угадать от 2 до 7 оставшихся.

$X_i$	2	3	4	5	6	7
$P_i$	0,311	0,043	0,058	0,012	0,001282	0,00006104

Табл. 6

Суммарная вероятность угадать не менее 5 вопросов: 0,42534304.

Вычисления показывают, что вероятность угадывания уменьшается с увеличением числа альтернатив и числа вопросов в тесте. Наиболее вероятно угадать два или три вопроса, что не достаточно для получения положительной оценки.

Начиная с шестого вопроса, вероятность угадывания становится около 1% (не зависимо от того на сколько вопросов известен точный ответ). Эти данные представлены в таблицах. Если для теста из десяти вопросов повысить порог оценки «3» до семи правильных ответов, вероятность угадывания станет менее 1% не будет влиять на объективность оценивания.

Исходя из полученных результатов, можно заключить, что суммарная вероятность угадать 5-6 или более ответов из 10-ти, не зная ни одного ответа равна 7,75%; зная один ответ – 16,6%; зная два ответа – 32,2%; зная три ответа – 42,5%. Зная, всего два правильных ответа вероятность угадывания больше трети т.е сохраняется правило больше знаем- выше результат.

## 2.2 Определение вероятностей угадывания путем эксперимента

*«Наше представление... было бы только иллюзией, если бы данные опыта не подтверждали правоту сделанных предположений...»  
А.Н. Колмогоров*

Группе студентов, состоящей из 50 человек, был предложен тесты, состоящие из десяти и пятнадцати вопросов. Тесты различались по темам (математика, информатика, русский язык), способам реализации. Студенты отвечали, не задумываясь над сутью вопроса. Контрольным измерением каждого теста был количество верно выполненных заданий. После обработки тестов были получены следующие результаты. Для теста из десяти вопросов.

<b>X</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
<b>P</b>	0,06	0,18	0,34	0,22	0,12	0,04	0,02	0,02	0	0	0

Табл. 7

Результаты вычислений (Табл.1) и результаты эксперимента (Табл. 1) представлены графически (Рис.3).

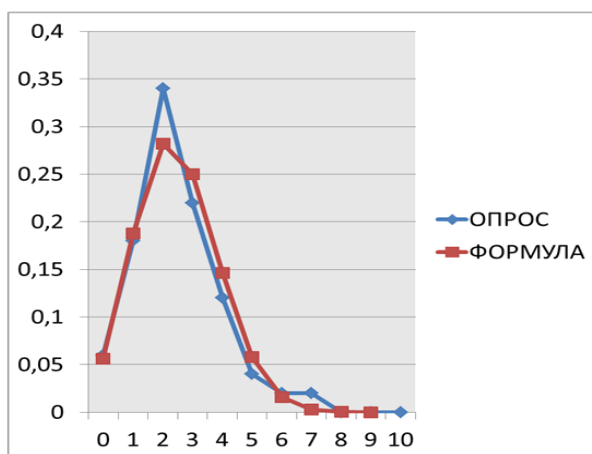


Рис. 4

Проведем сравнение экспериментальных данных со значениями, полученными по формулам. Можно сделать следующие выводы: большинства(35%) опрошенных угадали три ответа из десяти; только 10% опрошенных, угадали более половины ответов, при повышении порога «тройки» до шести правильных ответов вероятность угадывания составила около 2%, это сопоставимо с теоретической (0,019505764).

Для тестов, состоящих из 15 вопросов, результаты представлены в таблице.

<b>X</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>
<b>P</b>	0,12	0,14	0,18	0,22	0,14	0,1	0,06	0,04	0	0	0	0	0	0	0	0

Табл. 8

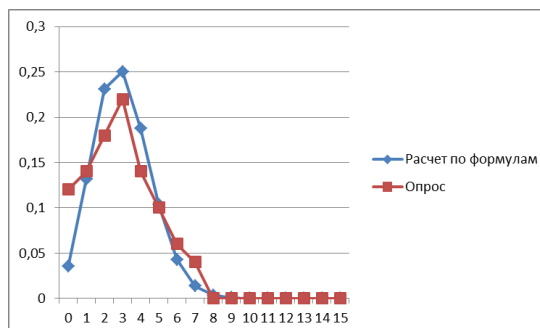


Рис.5

Никто из опрашиваемых ни разу не угадал более семи ответов, т.е. предположение о том, что если повысить порог оценки «3» до семи правильных ответов, вероятность угадывания не будет влиять на объективность оценивания можно принять как верное.

Проведя сравнение экспериментальных данных со значениями, полученными по формулам можно сделать следующие выводы: характер изменения вероятностей совпадает, вероятность угадывания ответов на тестовые вопросы распределена по биномиальному закону. Для теста из десяти вопросов с четырьмя вариантами ответа, большинство (35%) опрошенных угадали три ответа из десяти; только 10% опрошенных, угадали более половины ответов, при повышении порога «тройки» до

шести правильных ответов вероятность угадывания составила около 2%, это сравнимо с теоретической (0,019505764).

### **Заключение**

В тестировании всегда присутствует элемент случайности, но вероятность угадывания уменьшается с увеличением числа альтернатив и числа вопросов в тесте. В результате проведенного исследования, гипотеза о закономерности угадывания числа правильных ответов подтвердилась. Результаты угадывания ответов на тестовые вопросы распределены по биномиальному закону. Это подтверждают результаты экспериментального тестирования.

Проведенное исследование показало, что вероятность угадать половину ответов из 10, не зная ни одного ответа менее 8%; т.е. вероятность получения «3», ничего не зная и проставляя ответы на удачу, достаточно велика, если вы знаете всего три ответа, то вероятность повышается в 5 раз (42,5%).

## **Литература**

1. Аванесов В.С. Теория и практика педагогических измерений (материалы публикаций) Подготовлено ЦТ и МКО УГТУ-УПИ, 2005 г.
2. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. - 2-е изд., перепеч. и доп. - М.: ЮНИТИ –ДАНА, 2016.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М., высшая школа 2015.

## **Интернет-ресурсы**

4. <http://ru.wikipedia.org/wiki/> Википедия — свободная энциклопедия.
5. [http://www.ict.edu.ru/vconf/index.php?a=vconf&c=getForm&d=light&id\\_sec=123&id\\_thesis=4654&r=thesisDesc](http://www.ict.edu.ru/vconf/index.php?a=vconf&c=getForm&d=light&id_sec=123&id_thesis=4654&r=thesisDesc)
6. <http://luizaname.chat.ru/T/norm.htm>
7. [http://teachprog.narod.ru/program/teacher/test/teor\\_test.htm](http://teachprog.narod.ru/program/teacher/test/teor_test.htm)